有限交差性を持つ閉部分集合族とフィルターの繋がり

本稿では、「有限交差性を持つ閉部分集合族」と「フィルター」という、集合論および位相空間論における2つの重要な概念の繋がりについて詳しく解説します。これらは一見異なる概念に見えますが、「点の集まり方」や「空間のコンパクト性」を記述・探求するための重要なツールとして、根本的な部分で密接に結びついています。

これまでの議論の要点を一切省略することなく、さらに基本概念の定義、直観的理解を助ける具体例、そして完全な証明を加えた自己完結的 (self-contained) な解説を提供します。数学的な命題や証明は厳密な「だ・である調」で記述し、両者がどのようにして同じ山の頂上（極限やコンパクト性の理解）を目指すのかを明確にします。

1. 基礎概念の定義と具体例

まずは、議論の土台となる「有限交差性」と「フィルター」の厳密な定義から始める。

定義 1.1 (有限交差性, finite intersection property)
集合 X の部分集合の族 $\mathcal{A}$ が**有限交差性** (finite intersection property, FIP) を持つとは、$\mathcal{A}$ の任意の有限部分族 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ に対して、その共通部分が空にならないこと、すなわち

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$$

が成り立つことである。

例 1.2
実数直線 $\mathbb{R}$ において、区間の族 $\mathcal{A} = \{(0, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ を考える。任意の有限個の区間 $(0, 1/n_1), \ldots, (0, 1/n_k)$ を選んだとき、$N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ とすれば、共通部分は $(0, 1/N)$ となり空集合ではない ($\varnothing$ ではない)。したがって、この族 $\mathcal{A}$ は有限交差性を持つ。しかし、$\mathcal{A}$ に属するすべての集合の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n)$ は $\varnothing$ であることに注意されたい。

定義 1.3 (フィルター, filter)
集合 X 上の**フィルター** (filter) $\mathcal{F}$ とは、X の部分集合の族であり、以下の3つの条件をすべて満たすものである。

1. **非自明性:** $X \in \mathcal{F}$ であり、$\varnothing \notin \mathcal{F}$ である。
2. **有限交差で閉じている:** $A, B \in \mathcal{F}$ ならば、$A \cap B \in \mathcal{F}$ である。
3. **上位集合で閉じている:** $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subset B \subset X$ ならば、$B \in \mathcal{F}$ である。

例 1.4 (補有限フィルター, cofinite filter)
無限集合 X に対して、$\mathcal{F} = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ は有限集合}\}$ と定義する。この $\mathcal{F}$ はフィルターの条件を満たす。実際、$X \setminus X = \varnothing$ は有限なので $X \in \mathcal{F}$ であり、$X \setminus \varnothing = X$ は無限なので $\varnothing \notin \mathcal{F}$ である。また、$A, B \in \mathcal{F}$ なら $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ であり、有限集合の和は有限なので $A \cap B \in \mathcal{F}$ となる。上位集合で閉じていることも容易に確認できる。

2. 繋がりその1：「FIP」は「フィルター」の種になる

最も代数的・集合論的な直接の繋がりは、「有限交差性 (finite intersection property) を持つ集合族は、必ずあるフィルターを生成する（矛盾なく極限への方向を構成する核になる）」という事実である。フィルターの定義における条件1 ($\varnothing \notin \mathcal{F}$) と条件2 (有限交差で閉じる) から、フィルターそれ自体が必然的に有限交差性を持つ。逆もまた、以下の定理の通り成り立つ。

定理 2.1
集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ が有限交差性を持つための必要十分条件は、$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ となるような X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が存在することである。

証明. 必要性の証明 ($\Longrightarrow$):
$\mathcal{A}$ が有限交差性を持つと仮定する。まず、$\mathcal{A}$ の要素の有限個の共通部分をすべて集めた族 $\mathcal{B}$ を以下のように構成する。

$$\mathcal{B} = \{A_1 \cap \cdots \cap A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}$ が有限交差性を持つため、任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $B \neq \varnothing$ である。また、$\mathcal{B}$ の構成方法から、$\mathcal{B}$ は有限交差について閉じている（これを**フィルター基底 (filter base)** と呼ぶ）。

次に、$\mathcal{B}$ に含まれる集合を包含するような X の部分集合をすべて集め、それを $\mathcal{F}$ とする。

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } B \subset F\}$$

この $\mathcal{F}$ がフィルターであることを示す。

1. $\mathcal{A}$ の有限部分族から作られる $B \in \mathcal{B}$ は $\varnothing$ ではないため、$\varnothing$ を含むような $B \subset \varnothing$ は存在せず、$\varnothing \notin \mathcal{F}$ である。また $B \subset X$ より $X \in \mathcal{F}$ である。
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ とすると、ある $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が存在して $B_1 \subset F_1, B_2 \subset F_2$ となる。$\mathcal{B}$ は有限交差で閉じているため、$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ である。$B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2$ であるから、$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ となる。
3. $F \in \mathcal{F}$ かつ $F \subset G \subset X$ とすると、ある $B \in \mathcal{B}$ に対して $B \subset F \subset G$ となるため、定義より $G \in \mathcal{F}$ である。

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ であるから、求めるフィルター $\mathcal{F}$ が構成できた。

十分性の証明 ($\Longleftarrow$):
$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ となるフィルター $\mathcal{F}$ が存在すると仮定する。$\mathcal{A}$ の任意の有限部分族 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ をとる。$A_i \in \mathcal{F}$ であり、フィルターは有限交差について閉じているため、$A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$ である。フィルターの定義より $\varnothing \notin \mathcal{F}$ であるため、$A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$ である。よって $\mathcal{A}$ は有限交差性を持つ。

■

3. 繋がりその2：位相空間における「コンパクト性」の特徴づけ

舞台を位相空間論に移し、「閉部分集合族」という条件が加わると、有限交差性とフィルターの繋がりは**空間のコンパクト性 (compactness)** の翻訳言語として機能する。

定義 3.1 (コンパクト, compact)
位相空間 X が**コンパクト (compact)** であるとは、X の任意の開被覆 (open cover) $\mathcal{U}$ が有限部分被覆 (finite subcover) を持つことである。すなわち、$X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たす任意の開集合族 $\mathcal{U}$ に対して、有限個の要素

$U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して、$X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ となることである。

この標準的な定義は、De Morganの法則を用いることで、直ちに「閉集合の有限交差性」に関する同値な条件へと翻訳される。

定理 3.2 (閉部分集合のFIPによる特徴づけ)
位相空間 X がコンパクトであることと、X の「有限交差性を持つ任意の閉部分集合族 $\mathcal{C}$」に対して、その全体の共通部分が空にならない（$\bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing$）ことは同値である。

証明. 位相空間 X において、閉集合族 $\mathcal{C}$ を考える。$\mathcal{U} = \{X \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$ とすると、各要素は開集合である。

$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \varnothing$ であることと、De Morganの法則より $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) = \bigcup \mathcal{U}$ となること（すなわち $\mathcal{U}$ が X の開被覆であること）は同値である。

また、$\mathcal{C}$ の有限部分族 $\{C_1, \dots, C_n\}$ に対して $\bigcap_{i=1}^n C_i = \varnothing$ となることと、$X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus C_i)$ となること（すなわち有限部分被覆を持つこと）も同値である。

したがって、「任意の開被覆が有限部分被覆を持つ」というコンパクト性の定義は、対偶をとることで「有限部分族の共通部分が常に空でない（FIPを持つ）ならば、全体の共通部分も空でない」という主張に完全に一致する。

■

4. フィルターによるコンパクト性の特徴づけと完全な繋がり

次に、フィルターの言葉で位相空間における極限や収束を表現する。「ある点に向かって集合がどう細かくなっていくか」という動的なイメージが定式化される。

定義 4.1 (フィルターの集積点, cluster point)
位相空間 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が、点 $x \in X$ を**集積点 (cluster point)** に持つとは、x の任意の近傍 V と、フィルターの任意の要素 $F \in \mathcal{F}$ に対して、$F \cap V \neq \varnothing$ が成り立つことである。

定理 4.2 (フィルターによる特徴づけ)
位相空間 X がコンパクトであることと、X 上の任意のフィルター $\mathcal{F}$ が少なくとも1つの集積点を持つことは同値である。（※「任意の超フィルター (ultrafilter) が収束する」と言い換えることも可能である）。

ここで、定理3.2（閉部分集合族のFIP）と定理4.2（フィルターの集積点）がどのように直結しているのか、その証明を通じて両者の深い繋がりを明らかにする。

証明. 閉集合のFIPとフィルターの集積点の関係性：
点 $x \in X$ が部分集合 A の閉包 $\overline{A}$ に属するための必要十分条件は、x の任意の近傍 V に対して $A \cap V \neq \varnothing$ となることである。この事実をフィルターの集積点の定義と見比べると、
「x がフィルター $\mathcal{F}$ の集積点である」 $\iff$ 「任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $x \in \overline{F}$」 $\iff$ 「$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$」
という完全な対応があることがわかる。これを踏まえて同値性を証明する。

($\implies$) コンパクト性からフィルターの集積点の存在：
X をコンパクト空間とし、$\mathcal{F}$ を X 上の任意のフィルターとする。フィルターの各要素の閉包をとって新しい閉集合族 $\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$ を考える。

$\mathcal{F}$ はフィルターであるから有限交差性を持つ。すなわち任意の有限部分族 $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ に対して $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \varnothing$ である。各 i について $F_i \subset \overline{F_i}$ だから、当然 $\bigcap_{i=1}^n \overline{F}_i \neq \varnothing$ となる。よって閉部分集合族 $\overline{\mathcal{F}}$ は有限交差性を持つ。
定理3.2より、X がコンパクトであるため、$\bigcap \overline{\mathcal{F}} \neq \varnothing$ である。この共通部分に含まれる点 x をとれば、上記で確認した通り、x は $\mathcal{F}$ の集積点である。

($\Longleftarrow$) フィルターの集積点からコンパクト性：
任意のフィルターが集積点を持つと仮定する。有限交差性を持つ任意の閉部分集合族 $\mathcal{C}$ が与えられたとする。定理2.1より、$\mathcal{C}$ は有限交差性を持つので、$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ となるフィルター $\mathcal{F}$ を生成できる。
仮定より、このフィルター $\mathcal{F}$ は少なくとも1つの集積点 x を持つ。すなわち $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ である。
$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ であるから、任意の $C \in \mathcal{C}$ は $\mathcal{F}$ の要素である。よって $x \in \overline{C}$ であるが、C は閉集合なので $\overline{C} = C$ である。したがって $x \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ となり、$\bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing$ が示された。定理3.2より X はコンパクトである。

■

5. 結論と発展的視点

以上の厳密な議論から、「有限交差性を持つ閉部分集合族」と「フィルター」は、以下のようにまとめられる。

- **代数的/集合論的繋がり:** 有限交差性 (FIP) は、矛盾なくフィルターを構成するための本質的な条件であり、FIPを持つ集合族はフィルターを生成する「核」として働く。
- **位相空間論的繋がり:** FIPを持つ「閉部分集合族の共通部分が空でない」という性質と、「フィルターが集積点を持つ」という性質は、どちらも「**空間の点が逃げ出さずにどこかに集まっている（コンパクトである）**」ことを記述するための翻訳言語の関係にある。

発展的視点： この繋がりは、さらに高度な位相空間論のトピックでも不可欠な役割を果たす。例えば、Tychonoff空間（完全正則Hausdorff空間）のStone-Čech コンパクト化 (Stone-Čech compactification) の構成においては、Z超フィルター (Z-ultrafilter) などの極大フィルターが空間の「新しい点」として追加される。特に、離散空間のStone-Čech コンパクト化においては、空間が超不連結 (extremally disconnected) となり、その位相の基底が clopen（開かつ閉）集合から構成されるなど、フィルターと閉集合（あるいは clopen 集合）の代数的性質が空間の幾何学的性質を見事に決定づけるのである。

引用文献・参考文献

本稿におけるフィルターとコンパクト性の理論は、以下の標準的な位相空間論の文献に基づく。

Cartan, H. (1937). Théorie des filtres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 205, 595-598.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3157c/f594.image
※ Henri Cartan によってフィルターの概念が初めて導入された歴史的文献。有限交差性とフィルターの繋がりが明記されている。

Willard, S. (2004). *General Topology*. Dover Publications.
https://books.google.co.jp/books/about/General_Topology.html?id=UrsHbOjiR8QC
※ 位相空間論の標準的教科書。Chapter 5 (Convergence) および Chapter 6 (Compactness) にて本稿の証明の詳細が網羅されている。

Bourbaki, N. (1998). *General Topology: Chapters 1-4*. Springer.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-61701-0
※ フィルターを用いた位相空間の定式化を体系化した古典的名著。